

4.1

- a) Pienin koulumatkan pituus on 1,3 km ja suurin 5,8 km. Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 1–1,9; 2,0–2,9; 3,0–3,9; 4,0–4,9 ja 5,0–5,9. Lasketaan, kuinka monta opiskelijaa kussakin ryhmässä on.

Koulumatka (km)	<i>f</i>
1–1,9	4
2,0–2,9	6
3,0–3,9	7
4,0–4,9	5
5,0–5,9	8

- b) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskentaohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A koulumatkojen pituusluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset. Kirjoitetaan sarakkeeseen E luokkien frekvenssit.

	A	B	C	D	E
1	Koulumatkan pituus	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	<i>f</i>
2	1,0-1,9	0.95	1.95	1.45	4
3	2,0-2,9	1.95	2.95	2.45	6
4	3,0-3,9	2.95	3.95	3.45	7
5	4,0-4,9	3.95	4.95	4.45	5
6	5,0-5,9	4.95	5.95	5.45	8

Pituudet on mitattu 0,1 metrin tarkkuudella. Tällöin esimerkiksi luokan 1,0–1,9 todellinen alaraja on 0,95 km ja todellinen yläraja 1,95 km.

Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo. Esimerkiksi luokan 1,0–1,9 luokkakeskus saadaan kaavalla $\text{keskiarvo} = (B_2 + C_2) / 2$. Kopioidaan kaavaa sarakkeessa D alaspäin.

Luokan 5,0–5,9 frekvenssi on suurin. Siis moodiluokka on 5,0 km – 5,9 km.

Määritetään muut tilastolliset tunnusluvut sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

n	30
Keskiarvo	3.6833
σ	1.3828
s	1.4065
Σx	110.5
Σx^2	464.375
Min	1.45
Q1	2.45
Mediaani	3.45
Q3	5.45
Max	5.45

Koulumatkan pituuden keskiarvo on 3,7 km ja keskihajonta 1,4 km.

Vastaus

- b) moodiluokka 5,0 km – 5,9 km; keskiarvo 3,7 km, keskihajonta 1,4 km

4.2

- a) Käytetään apuna GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A pituusluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset.

	A	B	C	D
1	Pituus	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus
2	41-43	40.5	43.5	42
3	44-46	43.5	46.5	45
4	47-49	46.5	49.5	48
5	50-52	49.5	52.5	51
6	53-55	52.5	55.5	54
7	56-58	55.5	58.5	57

Pituudet on mitattu senttimetrin tarkkuudella. Tällöin esimerkiksi luokan 41–43 todellinen alaraja on 40,5 cm ja todellinen yläraja 43,5 cm.

Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo. Esimerkiksi luokan 41–43 luokkakeskus saadaan kaavalla $\text{”}=(B2+C2)/2\text{”}$.
Kopioidaan kaavaa sarakkeessa D alaspäin.

- b) Määritetään keskiarvo ja keskihajonta sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

	A	B	C	D	E
1	Pituus	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	41-43	40.5	43.5	42	2
3	44-46	43.5	46.5	45	14
4	47-49	46.5	49.5	48	33
5	50-52	49.5	52.5	51	34
6	53-55	52.5	55.5	54	14
7	56-58	55.5	58.5	57	3

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	49.59
σ	3.1594
s	3.1753
Σx	4959
Σx^2	246915
Min	42
Q1	48
Mediaani	51
Q3	51
Max	57

Pituuden keskiarvo on 49,6 cm.

c) Käytetään apuna b-kohdan tuloksia. Keskihajonta on 3,2 cm.

Vastaus

a) 42 cm, 45 cm, 48 cm, 51 cm, 54 cm, 57 cm

b) 49,6 cm

c) 3,2 cm

4.3

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A59.

1. Selvitä aineiston pienin ja suurin arvo.

58	170	
59	166	
60	Pienin arvo	'=MIN(A2:A59)
61	Suurin arvo	'=MAKS(A2:A59)

58	170	
59	166	
60	Pienin arvo	163
61	Suurin arvo	197

Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 160–169, 170–179, 180–189 ja 190–199.

2. Kirjoita luokat ja luokkien todelliset ylärajat laskentataulukkoon. Laske luokkien frekvenssit **Ohjattu funktion luonti** -toimintoa käyttäen:

- Valitse solu D2, johon tulee luokan 160–169 havaintoarvojen frekvenssit
- Valitse **Lisää**-valikosta **Funktio** ja etsi listasta **TAAJUUS**-funktio.
- Valitse Seuraava.
- Syötä **Tiedot**-syöttökenttään alue, jossa pituudet ovat: A2:A59.
- Syötä **Luokat**-syöttökenttään alue, jossa luokkien todelliset ylärajat ovat: C2:C5.
- Valitse **OK**.

	A	B	C	D
1	Pituudet (cm)	Pituusluokka (cm)	Todellinen yläraja	<i>f</i>
2	170	160-169	169,5	9
3	165	170-179	179,5	26
4	185	180-189	189,5	18
5	170	190-199	199,5	5
6	163			0

Luokitellun aineiston frekvenssitaulukko:

Pituus (cm)	f
160–169	9
170–179	26
180–189	18
190–199	5

4.4

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A141.

1. Selvitä aineiston pienin ja suurin arvo.

140	120	
141	405	
142	Pienin arvo	'=MIN(A2:A141)
143	Suurin arvo	'=MAKS(A2:A141)

140	120	
141	405	
142	Pienin arvo	110
143	Suurin arvo	470

Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 100–199, 200–299, 300–399 ja 400–499.

2. Kirjoita luokat ja luokkien todelliset ylärajat laskentataulukkoon. Laske luokkien frekvenssit **Ohjattu funktion luonti** -toimintoa käyttäen:

- Valitse solu D2, johon tulee luokan 100–199 havaintoarvojen frekvenssit
- Valitse **Lisää**-valikosta **Funktio** ja etsi listasta **TAAJUUS**-funktio.
- Valitse Seuraava.
- Syötä **Tiedot**-syöttökenttään alue, jossa pituudet ovat: A2:A141.
- Syötä **Luokat**-syöttökenttään alue, jossa luokkien todelliset ylärajat ovat: C2:C5.
- Valitse **OK**.

	A	B	C	D
1	Etäisyys (m)	Etäisyysluokka (m)	Todellinen yläraja	<i>f</i>
2	115	100-199	199,5	56
3	420	200-299	299,5	42
4	310	300-399	399,5	28
5	120	400-499	499,5	14
6	115			0

Luokitellun aineiston frekvenssitaulukko:

Etäisyys (m)	<i>f</i>
100–199	56
200–299	42
300–399	28
400–499	14

4.5

Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc-ohjelmalla.

1. Syötä sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit.

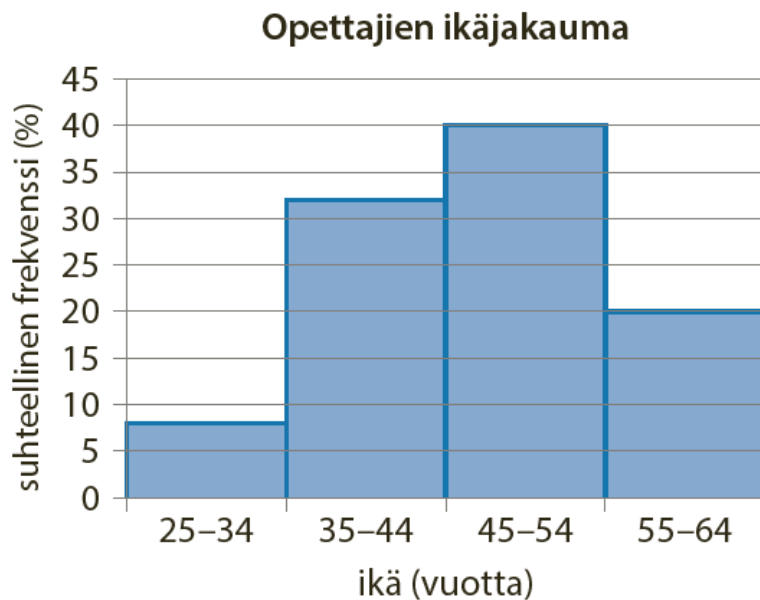
	A	B
1	Ikä (vuotta)	<i>f</i> %
2	25-34	8
3	35-44	32
4	45-54	40
5	55-64	20

2. Piirrä histogrammi **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen:

- Maalaa solut A1–B5.
- Valitse **Lisää**-valikosta **Kaavio**.
- Vaiheessa **1. Kaaviotyyppi** valitse kaaviotyyppi **Pylväs**.
- Vaiheessa **2. Tietoaalue** valitse **Arvosarjat sarakkeissa, Ensimmäinen rivi sisältää otsikoita ja Ensimmäinen sarake sisältää otsikoita**.
- Vaiheessa **3. Arvosarja** älä tee muutoksia.
- Vaiheessa **4. Kaavioelementit** syötä kaavion otsikoksi ”Opettajien ikäjakauma”, X-akselin otsikoksi ”ikä (vuotta)” ja Y-akselin otsikoksi ”suhteellinen frekvenssi (%)” ja poista ruksi kohdasta **Näytä selite**.
- Valitse **Valmis**.

Ohjelma piirtää pylväskuvion, jota pitää vielä muokata.

- Aktivoi piirtoalue kaksoisnapauttamalla diagrammia.
- Napauta hiiren oikealla näppäimellä jotakin pylvästä ja valitse **Muotoile arvosarja**.
- Muuta **Asetukset**-välilehdeltä **Objektivälin (Spacing)** arvoksi 0 %.
- Valitse **OK**.



4.6

Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc-ohjelmalla.

1. Syötä sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit.

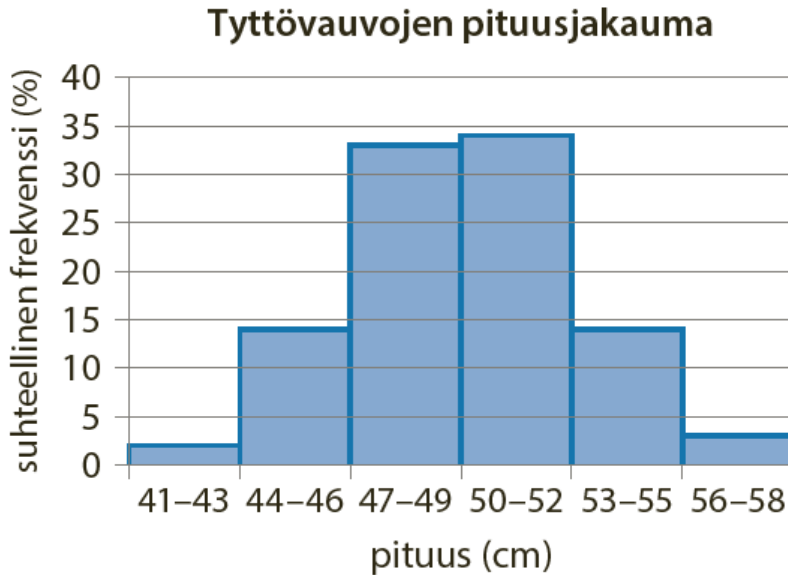
	A	B
1	Pituus (cm)	<i>f</i> %
2	41-43	2
3	44-46	14
4	47-49	33
5	50-52	34
6	53-55	14
7	56-58	3

2. Piirrä histogrammi **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen:

- Maalaa solut A1–B7.
- Valitse **Lisää**-valikosta **Kaavio**.
- Vaiheessa **1. Kaaviotyyppi** valitse kaaviotyyppi **Pylväs**.
- Vaiheessa **2. Tietoa** valitse **Arvosarjat sarakkeissa**, **Ensimmäinen rivi sisältää otsikoita** ja **Ensimmäinen sarake sisältää otsikoita**.
- Vaiheessa **3. Arvosarja** älä tee muutoksia.
- Vaiheessa **4. Kaavioelementit** syötä kaavion otsikoksi ”Opettajien ikäjakauma”, X-akselin otsikoksi ”ikä (vuotta)” ja Y-akselin otsikoksi ”suhteellinen frekvenssi (%)” ja poista ruksi kohdasta **Näytä selite**.
- Valitse **Valmis**.

Ohjelma piirtää pylväskuvion, jota pitää vielä muokata.

- Aktivoi piirtoalue kaksoisnapauttamalla diagrammia.
- Napauta hiiren oikealla näppäimellä jotakin pylvästä ja valitse **Muotoile arvosarja**.
- Muuta **Asetukset**-välilehdeltä **Objektivälin (Spacing)** arvoksi 0 %.
- Valitse **OK**.



4.7

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A ikäluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset. Kirjoitetaan sarakkeeseen E luokkien frekvenssit.

	A	B	C	D	E
1	Ikä (vuotta)	Todellinen alar...	Todellinen ylä...	Luokkakeskus	f %
2	25-34	25	35	30	8
3	35-44	35	45	40	32
4	45-54	45	55	50	40
5	55-64	55	65	60	20

Ikä vaihtuu syntymäpäivänä, joten esimerkiksi luokassa 25–34 olevat ihmiset ovat täyttäneen 25 vuotta mutta eivät 35 vuotta. Luokan todelliset rajat ovat 25 ja 35 vuotta.

Tunnusluvut voidaan määrittää käyttämällä havaintoarvoina sarakkeessa D olevia luokkakeskuksia ja havaintoarvojen lukumäärinä sarakkeessa E olevia suhteellisia frekvenssejä. Määritetään tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	47.2
σ	8.727
s	8.7709
Σx	4720
Σx^2	230400
Min	30
Q1	40
Mediaani	50
Q3	50
Max	60

Opettajien keski-ikä on 47,2 vuotta.

Vastaus

47,2 vuotta

4.8

- a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla. Syötetään tarvittavat tiedot.

	A	B	C	D	E
1	Ikä	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	6-8	6	9	7.5	15
3	9-11	9	12	10.5	27
4	12-14	12	15	13.5	33
5	15-17	15	18	16.5	25

Määritetään tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	12.54
σ	3.0263
s	3.0415
Σx	1254
Σx^2	16641
Min	7.5
Q1	10.5
Mediaani	13.5
Q3	15
Max	16.5

Jalkapalloturnaukseen osallistujien keski-ikä on 12,5 vuotta.

b) Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc-ohjelmalla.

Syötetään sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit. Piirretään histogrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



Vastaus

a) 12,5 vuotta

4.9

a) Käytetään apuna GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A massaluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset.

	A	B	C	D
1	Massa	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus
2	140-144	139.5	144.5	142
3	145-149	144.5	149.5	147
4	150-154	149.5	154.5	152
5	155-159	154.5	159.5	157

Luokkakeskukset ovat 142 g, 147 g, 152 g ja 157 g.

b) Määritetään keskiarvo ja keskihajonta sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

	A	B	C	D	E
1	Massa	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	140-144	139.5	144.5	142	20
3	145-149	144.5	149.5	147	35
4	150-154	149.5	154.5	152	30
5	155-159	154.5	159.5	157	15

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	149
σ	4.8477
s	4.8721
Σx	14900
Σx^2	2222450
Min	142
Q1	147
Mediaani	147
Q3	152
Max	157

Pakkausten massan keskiarvo on 149 g.

c) Käytetään apuna b-kohdan tuloksia. Keskihajonta on 4,9 g.

Vastaus

- a) 142 g, 147 g, 152 g ja 157 g
- b) 149 g
- c) 4,9 g

4.10

- a) Kolme vasemmanpuoleista pylvästä kuvaavat tilanteita, joissa kodin etäisyys lähimmästä bussipysäkistä on alle 600 metriä. Lasketaan näiden luokkien suhteelliset frekvenssit yhteen.

$$32\% + 28\% + 18\% = 78\%$$

Kodin etäisyys lähimmästä linja-autopysäkistä on alle 600 m 78 % opiskelijoista.

- b) Käytetään apuna GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.
Etäisyysluokkien keskukset ovat 100, 300, 500, 700, 900 ja 1100 (m).

	A	B
1	Luokkakeskus	f %
2	100	32
3	300	28
4	500	18
5	700	11
6	900	7
7	1100	4

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

Tilastot ▼	
n	100
Keskiarvo	390
σ	283.3725
s	284.8001
Σx	39000
Σx^2	23240000
Min	100
Q1	100
Mediaani	300
Q3	500
Max	1100

Keskimääräinen etäisyys linja-autopysäkestä on 390 m.

Vastaus

- a) 78 % opiskelijoista
- b) 390 m

4.11

- a) Pienin pinta-ala on 38 m^2 ja suurin 105 m^2 . Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 35–49, 50–64, 65–79, 80–94 ja 95–109. Lasketaan, kuinka monta opiskelijaa kussakin ryhmässä on.

Pinta-ala (m^2)	f
35–49	4
50–64	6
65–79	8
80–94	7
95–109	4

- b) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C	D	E
1	Koulumatkan pit...	Todellinen alar...	Todellinen ylä...	Luokkakeskus	f
2	35-49	34.5	49.5	42	4
3	50-64	49.5	64.5	57	6
4	65-79	64.5	79.5	72	8
5	80-94	79.5	94.5	87	7
6	95-109	94.5	109.5	102	4

Luokan 65–79 frekvenssi on suurin. Siis moodiluokka on $65 \text{ m}^2 - 79 \text{ m}^2$.

Määritetään muut tilastolliset tunnusluvut sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

n	29
Keskiarvo	72.5172
σ	18.6781
s	19.0087
Σx	2103
Σx^2	162621
Min	42
Q1	57
Mediaani	72
Q3	87
Max	102

Kotien pinta-alan keskiarvo on 73 m^2 ja keskihajonta 19 m^2 .

Vastaus

b) moodiluokka $65 \text{ m}^2 - 79 \text{ m}^2$, keskiarvo 73 m^2 , keskihajonta 19 m^2

4.12

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A92.

Selvitetään aineiston pienin ja suurin arvo.

91	17,3	
92	17,3	
93	Pienin arvo	'=MIN(A2:A92)
94	Suurin arvo	'=MAKS(A2:A92)

91	17,3	
92	17,3	
93	Pienin arvo	15
94	Suurin arvo	30,7

Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 15,0–19,9; 20,0–24,9; 25,0–29,9 ja 30,0–34,9.

Lasketaan luokkien frekvenssit **TAAJUUS** -funktiota käyttäen.

	A	B	C	D
1	Ylin lämpötila (degC)	Lämpötilaluokka (degC)	Todellinen yläraja	<i>f</i>
2	16,5	15,0-19,9	19,95	44
3	19,3	20,0-24,9	24,95	33
4	19,6	25,0-29,9	29,95	13
5	21,3	30,0-34,9	34,95	1
6	16,5			0
7	22,4			

Luokitellun aineiston frekvenssitaulukko:

Lämpötila (°C)	<i>f</i>
15,0–19,9	44
20,0–24,9	33
25,0–29,9	13
30,0–34,9	1

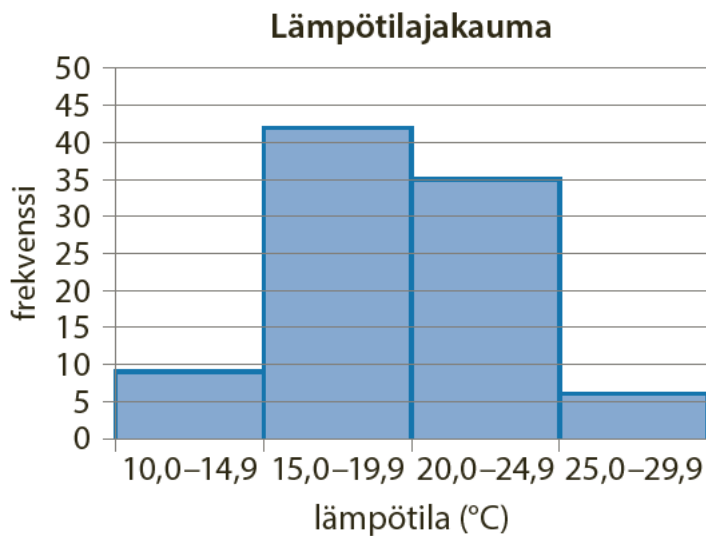
4.13

Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc-ohjelmalla.

Syötetään sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit.

	A	B
1	Lämpötila (°C)	f %
2	10,0-14,9	9
3	15,0-19,9	42
4	20,0-24,9	35
5	25,0-29,9	6

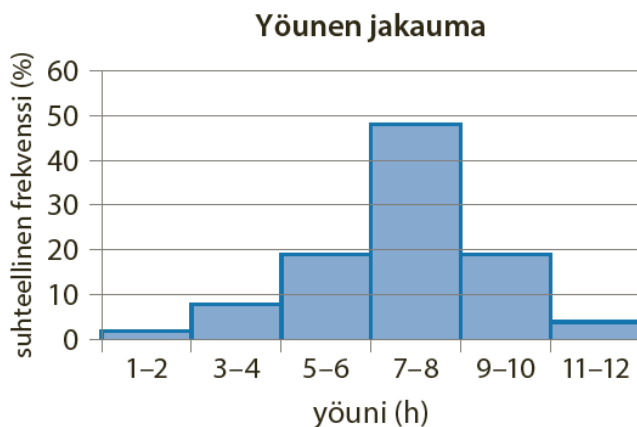
Piirretään histogrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



4.14

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc-ohjelmalla.

Syötetään sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit. Piirretään histogrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



b) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla. Syötetään tarvittavat tiedot.

	A	B	C	D	E
1	Yöunen pituus	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	1-2	0.5	2.5	1.5	2
3	3-4	2.5	4.5	3.5	8
4	5-6	4.5	6.5	5.5	19
5	7-8	6.5	8.5	7.5	48
6	9-10	8.5	10.5	9.5	19
7	11-12	10.5	12.5	11.5	4

Määritetään tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	7.22
σ	2.0203
s	2.0305
Σx	722
Σx^2	5621
Min	1.5
Q1	5.5
Mediaani	7.5
Q3	7.5
Max	11.5

Yöunen pituuden keskiarvo on 7,2 tuntia.

- c) Luokan 7–8 frekvenssi on suurin. Siis moodiluokka on 7 h – 8 h.

Vastaus

b) 7,2 tuntia

c) 7–8

4.15

- a) Käytetään apuna GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A ikäluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset.

	A	B	C	D
1	Ikä	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus
2	0-1	0	2	1
3	2-4	2	5	3.5
4	5-6	5	7	6

Todelliset rajat ovat 0, 2, 5 ja 7. Luokkakeskukset ovat 1,0; 3,5 ja 6,0.

- b) Määritetään keskiarvo ja keskihajonta sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

	A	B	C	D	E
1	Ikä	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	0-1	0	2	1	48
3	2-4	2	5	3.5	145
4	5-6	5	7	6	109

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

n	302
Keskiarvo	4.005
σ	1.7304
s	1.7332
Σx	1209.5
Σx^2	5748.25
Min	1
Q1	3.5
Mediaani	3.5
Q3	6
Max	6

Lasten keski-ikä on 4,0 vuotta.

Vastaus

- a) todelliset rajat 0, 2, 5 ja 7,
luokkakeskukset 1,0; 3,5 ja 6,0
- b) 4,0 vuotta

4.16

- a) Luokan 0–2 todelliset rajat ovat 0 ja 2,5.

Aika ei voi olla 0 tuntia pienempi.

Lasketaan luokkakeskus.

$$\frac{0 - 2,5}{2} = 1,25$$

Luokkakeskus on 1,25.

- b) Käytetään apuna GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.

Määritetään keskiarvo ja keskihajonta sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

	A	B	C	D	E
1	Ikä	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	0-2	0	2.5	1.25	6
3	3-5	2.5	5.5	4	7
4	6-9	5.5	9.5	7.5	14
5	10-14	9.5	14.5	12	16
6	15-20	14.5	20.5	17.5	23
7	21-30	20.5	30.5	25.5	16
8	31-40	30.5	40.5	35.5	9
9	41-50	40.5	50.5	45.5	6
10	51-	50.5	60	55.25	3

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	19.0125
σ	13.204
s	13.2705
Σx	1901.25
Σx^2	53582.0625
Min	1.25
Q1	7.5
Mediaani	17.5
Q3	25.5
Max	55.25

Sosiaalisessa mediassa käytetyn ajan keskiarvo on 19,0 tuntia ja keskihajonta 13,3 tuntia.

Vastaus

- a) todelliset rajat 0 ja 2,5; luokkakeskus 1,25
- b) keskiarvo 19,0 tuntia, keskihajonta 13,3 tuntia

4.17

Taulukoidaan tehtävässä annetut tiedot ja määritetään luokkakeskukset. Käytetään apuna LibreOffice Calc-ohjelmistoa.

	A	B	C	D
1	Laskun summa (€)	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus
2	0-24,99	0	24,99	'=(B2+C2)/2
3	25-49,99	25	49,99	'=(B3+C3)/2
4	50-99,99	50	99,99	'=(B4+C4)/2
5	100-199,99	100	199,99	'=(B5+C5)/2
6	200-399,99	200	399,99	'=(B6+C6)/2

	A	B	C	D
1	Laskun summa (€)	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus
2	0-24,99	0	24,99	12,495
3	25-49,99	25	49,99	37,495
4	50-99,99	50	99,99	74,995
5	100-199,99	100	199,99	149,995
6	200-399,99	200	399,99	299,995

Laskujen loppusumma ilmoitetaan 0,01 euron tarkkuudella.

Käytetään luokkakeskuskuksia luokkiensa edustajina ja arvioidaan, kuinka paljon kunkin luokan laskujen summa on.

D	E	F
Luokkakeskus	<i>f</i>	Yhteensä
12,495	27	'=D2*E2
37,495	42	'=D3*E3
74,995	31	'=D4*E4
149,995	7	'=D5*E5
299,995	3	'=D6*E6

D	E	F
Luokkakeskus	<i>f</i>	Yhteensä
12,495	27	337,365
37,495	42	1574,79
74,995	31	2324,845
149,995	7	1049,965
299,995	3	899,985

Lasketaan vielä lopuksi kaikkien luokkien laskujen summa.

D	E	F
Luokkakeskus	<i>f</i>	Yhteensä
12,495	27	337,365
37,495	42	1574,79
74,995	31	2324,845
149,995	7	1049,965
299,995	3	899,985
	Yhteensä	'=SUMMA(F2:F6)

D	E	F
Luokkakeskus	<i>f</i>	Yhteensä
12,495	27	337,365
37,495	42	1574,79
74,995	31	2324,845
149,995	7	1049,965
299,995	3	899,985
	Yhteensä	6186,95

Laskujen maksamiseen tarvitaan rahaa noin 6200 euroa.

Vastaus

noin 6200 euroa

4.18

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

Ilmoitetaan nukkumaanmeno aika kellonajasta 22.00 kuluneina minuutteina.

	A	B	C	D	E
1	Kuluneet minuutit	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	0-59	0	60	30	18
3	60-119	60	120	90	36
4	120-179	120	180	150	52
5	180-239	180	240	210	15
6	240-299	240	300	270	4

Kellonaika vaihtuu vasta, kun kokonainen minuutti tulee täyteen, joten esimerkiksi luokassa 0–59 todellinen yläraja on 60 minuuttia.

Tunnusluvut voidaan määrittää käyttämällä havaintoarvoina sarakkeessa D olevia luokkakeskuksia ja havaintoarvojen lukumäärinä sarakkeessa E olevia suhteellisia frekvenssejä. Määritetään tunnusluvut.

n	125
Keskiarvo	126.48
σ	58.7368
s	58.9731
Σx	15810
Σx^2	2430900
Min	30
Q1	90
Mediaani	150
Q3	150
Max	270

Keskiarvo on 126 minuuttia. Kellonajasta 22.00 on kulunut 126 minuuttia, kun kello on 00.06.

Vastaus

00.06

4.19

- a) Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentahjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc-ohjelmalla.

Muodostetaan tasaväliset luokat 15 vuoden välein. Ensimmäinen luokka on 0–14, toinen 15 – 29, jne.

Lasketaan luokkien absoluuttiset frekvenssit **SUMMA** -funktion avulla.

8	Ikä	<i>f</i>
9	0 – 14	'=SUMMA(B4:D4)
10	15 – 29	'=SUMMA(E4:G4)
11	30 – 44	'=SUMMA(H4:J4)
12	45 – 59	'=SUMMA(K4:M4)
13	60 – 74	'=SUMMA(N4:P4)
14	75 – 89	'=SUMMA(Q4:S4)
15	90 – 104	'=SUMMA(T4:V4)
16	Yhteensä	'=SUMMA(B9:B15)

Ikä	<i>f</i>
0 – 14	860861
15 – 29	959632
30 – 44	1067292
45 – 59	1032819
60 – 74	1065354
75 – 89	490988
90 – 104	56847
Yhteensä	5533793

Lasketaan seuraavaksi luokkien suhteelliset frekvenssit.

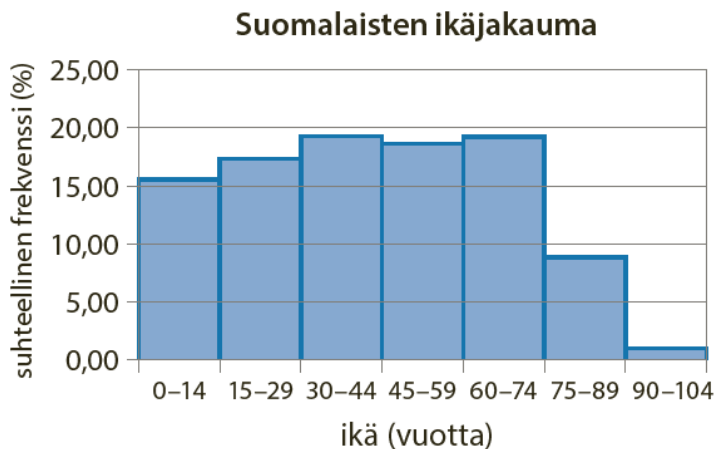
8	Ikä	<i>f</i>	<i>f</i>%
9	0 – 14	860861	'=B9/\$B\$16*100
10	15 – 29	959632	'=B10/\$B\$16*100
11	30 – 44	1067292	'=B11/\$B\$16*100
12	45 – 59	1032819	'=B12/\$B\$16*100
13	60 – 74	1065354	'=B13/\$B\$16*100
14	75 – 89	490988	'=B14/\$B\$16*100
15	90 – 104	56847	'=B15/\$B\$16*100
16	Yhteensä	5533793	'=SUMMA(C9:C15)

8	Ikä	<i>f</i>	<i>f</i>%
9	0 – 14	860861	15,56
10	15 – 29	959632	17,34
11	30 – 44	1067292	19,29
12	45 – 59	1032819	18,66
13	60 – 74	1065354	19,25
14	75 – 89	490988	8,87
15	90 – 104	56847	1,03
16	Yhteensä	5533793	100

Laaditaan vielä summafrekvenssitaulukko.

Ikä (vuotta)	Suhteellinen frekvenssi (%)
0–14	15,56
15–29	17,34
30–44	19,29
45–59	18,66
60–74	19,25
75–89	8,87
90–104	1,03

b) Piirretään histogrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



c) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla. Syötetään tarvittavat tiedot.

	A	B	C	D	E
1	Ikä	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	0 - 14	0	15	7.5	860861
3	15 - 29	15	30	22.5	959632
4	30 - 44	30	45	37.5	1067292
5	45 - 59	45	60	52.5	1032819
6	60 - 74	60	75	67.5	1065354
7	75 - 89	75	90	82.5	490988
8	90 - 104	90	105	97.5	56847

Määritetään tunnusluvut.

n	5533793
Keskiarvo	43.416
σ	23.9987
s	23.9987
Σx	240255112.5
Σx^2	13618031906.25
Min	7.5
Q1	22.5
Mediaani	37.5
Q3	67.5
Max	97.5

Suomalaisten keski-ikä vuonna 2020 on noin 43,4 vuotta.

Vastaus

c) 43,4 vuotta

4.20

- a) Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A71.

Selvitetään aineiston pienin ja suurin arvo.

70	40	
71	42	
72	Pienin arvo	'=MIN(A2:A71)
73	Suurin arvo	'=MAKS(A2:A71)

70	40	
71	42	
72	Pienin arvo	1
73	Suurin arvo	72

Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 0–14, 15–29, 30–44, 45–59 ja 60–74.

Lasketaan luokkien frekvenssit **TAAJUUS**-funktiota käyttäen.

	A	B	C	D
1	Ikä (vuotta)	Ikä (vuotta)	Yläraja	f
2	7	0-14	14	20
3	40	15-29	29	11
4	43	30-44	44	11
5	14	45-59	59	24
6	46	60-74	74	4
7	44			0

TAAJUUS-funktiossa ylärajana pitää käyttää todellisen ylärajan sijaan luokan ylärajaa (esim. luokassa 0–14 ylärajana tulee käyttää arvoa 14, ei luokan todellista ylärajaa 15).

Luokitellun aineiston frekvenssitaulukko:

Ikä (vuotta)	Frekvenssi
0–14	20
15–29	11
30–44	11
45–59	24
60–74	4

- b) Lasketaan ikien keskiarvo LibreOffice Calc -ohjelmistolla käyttäen **KESKIARVO**-funktiota.

71	42	
72	Keskiarvo	'=KESKIARVO(A2:A71)
73		

71	42	
72	Keskiarvo	32,56

Ikien keskiarvo on 32,56 vuotta.

Lasketaan seuraavaksi arvio ikien keskiarvolle luokitellun aineiston avulla. Käytetään GeoGebran taulukkolaskentaa. Syötetään tarvittavat tiedot.

	A	B	C	D	E
1	Ikä	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokakeskus	f %
2	0 – 14	0	15	7.5	20
3	15 – 29	15	30	22.5	11
4	30 – 44	30	45	37.5	11
5	45 – 59	45	60	52.5	24
6	60 – 74	60	75	67.5	4

Määritetään tunnusluvut.

n	70
Keskiarvo	33.4286
σ	20.1121
s	20.2573
Σx	2340
Σx^2	106537.5
Min	7.5
Q1	7.5
Mediaani	37.5
Q3	52.5
Max	67.5

Ikien keskiarvo on luokitellun aineiston perusteella 33,43 vuotta.

Verrataan keskiarvojen erotusta alkuperäisen aineiston keskiarvoon.

$$\frac{33,43 - 32,56}{32,56} \approx 0,027 = 2,7\%$$

Vastaus

- b) Luokitellusta aineistosta laskettu keskiarvo on 33,43 vuotta ja todellinen keskiarvo 32,56 vuotta. Luokitellusta aineistosta laskettu keskiarvo on 2,7 % suurempi kuin todellinen keskiarvo.